

A

代數

曾有人對代數作了以下的描述：以未知數開始，亦以未知數告終。大約在公元 300 年，狄奧芬塔斯 (Diophantus) 完成了數學史上最早期的代數著作 'Arithmetica'。這位被後人尊稱為「代數之父」的希臘數學家，建立了以未知數符號作為運算工具的思考模式。

代數 (algebra) 源自阿拉伯文 'al-jabr'，包含了「精簡濃縮」的意思。代數建基於算術的四則運算和整數的特點（例如以質數界定正整數），並以正數項轉置為負數量的基本概念配合，使到引入符號代號的數式得以化簡和歸類。

學習代數須掌握以符號作數量代號的「抽象」觀念。將未知數代號套入算術數式的演繹方法，或許讓我們較容易理解代數意念的演進。譬如說，設 x 為某東西的數量，數式 ' $2x + 3x = 5x$ ' 的含意會較算式 ' $2 + 3 = 5$ ' 的為完整。若進一步設 $w = 2x$ ， $y = 3x$ 和 $z = 5x$ ，則得到 ' $w + y = z$ '。其實，代數式 ' $w + y = z$ ' 不會比算式 ' $2 + 3 = 5$ ' 更為抽象，問題是我們怎樣去接受非數字符號在數學世界裏所發揮的作用。

在這裏，希望你們可通過一些生活上的事例，去探討代數意念和運算的效用。



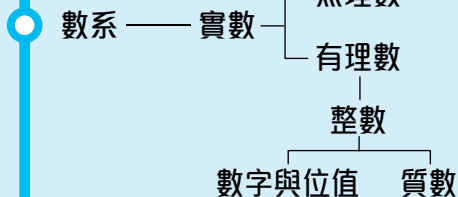
香港中學文憑考試數學課程

代數 (相關學習點)

一元二次方程

○ 求根公式

函數



○ 函數的概念

○ 函數的記法： $f(x)$

○ 指數函數

多項式

○ 除法原理

○ 餘式定理

比例及變分

○ 正變及反變

○ 聯變及部分變

等差及等比數列

○ 數列

○ Σ 記號

○ 公差和公比

○ 數列的求和法

不等式

○ 線性規畫



疫情數學：病毒傳播為何這麼快？

2020年春，新冠疫情 (Covid-19) 爆發，持續了三年多後，我們的生活才得以慢慢地復常過來。在疫情期間，為了減慢、以至杜絕病毒傳染鏈，政府採取了嚴格的防疫措施，包括要戴口罩、勤洗手、減少外出。為配合防疫措施，學校停止了面授課，改為以網課形式進行。網課期間，小思和小甘學懂了在課餘時間以視像會議進行網上研習。2023年春，學校回復以面授形式上課；但他們仍然樂於在放長假期間、或因惡劣天氣而停課的日子，在家以視像形式來進行研討。

「為甚麼病毒可以散播得這麼快呢？」小思在一次網上研習中，向小甘提出問題。



想一想

→ 當感染人數增加時，對病毒的傳播速度有何影響？如何以數學的方式表達該影響？

「病毒快速傳播的原因是由於其高傳染性、無症狀傳播、接觸密切和全球化等因素的結合。這也強調了採取適當的預防措施和公共衛生措施的重要性，以控制病毒的傳播。」小甘告訴小思，他嘗試利用 AI ChatGPT 來回答她這個問題，瞬間已給他列出四個不同的解釋。

「小甘，我想你從數學角度給我解釋病毒迅速傳播的現象！」小思不以為然地說。

「唉，我再嘗試問 AI 怎樣以數學去解釋這個問題時，得到的回應是一些我不懂得的數學概念，其中涉及應用微分方程的數學模型啊！」小甘感到困擾地說。

「其實，AI 只是一個工具而已，不應用作代替我們本身的思考呀！」小思很不屑地說。「我還是喜歡利用網上所得的相關資料來進行思辨。要從數學角度理解病毒的迅速傳播的現象，我想最關鍵的是涉及**基本傳染數 (reproduction number)** 背後有關**指數增長 (exponential growth)** 的理解。」小思與小甘分享她的數學日誌，記錄了基本指數模型。

「你說得頗有道理！我真的要好好重溫有關**指數函數 (exponential function)** 的概念。」小甘似有領悟地說。

「我知道 AI 將會是一個很厲害的學習工具，但我還是喜歡通過自己的思考來提出我感興趣的問題，那樣學習才會有意義的呢！」小思以肯定的語氣道出她的想法。

其後，小思又以 AI ChatGPT 來回答她自己提出的一個問題：「為何 AI 不能代替我的思維來從生活中尋覓數學的意義？」得到的回應，令她感到十分欣喜，開懷地笑了起來。

相關數學概念



基本傳染數 (reproduction number)：平均一個感染者會傳染多少人。

指數函數 (exponential function)： $y = a^x$ ， a 為正常數且 $a \neq 1$ 。

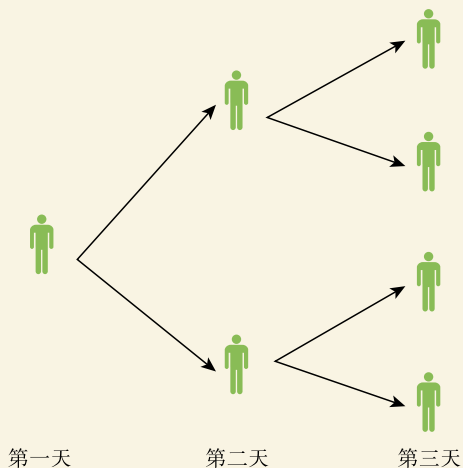
小思的數學日誌：基本指數模型

傳染病的傳播取決於個體之間的接觸量以及感染者將病毒傳給他們遇到的人的機會。如果該病的傳播風險為百分之百，且每個感染者在康復之前遇到兩個其他人，該病將很快開始迅速傳播。假設康復需要一天時間，這種情況將導致每天生病的人數翻倍。我們可以通過以下方程來模擬這種情況：

$$y = 2^{t-1}$$

其中， y = 感染的總人數， t = 從最初爆發開始經過的天數。

以圖形來描述這種情況：



這種情況，其中感染人數每天以一個固定不變的倍數增長，被稱為指數增長 (exponential growth)。它可以作為一種簡單的模型，用來描述在人群中病毒如何潛在地傳播。

(參考來源：Dr Julia Collins and Nadia Abdelal. *Spread of disease* , 2018)

小思與 AI ChatGPT 的對話

思 為何 AI 不能代替我的思維來從生活中尋覓數學的意義？

AI AI 無法代替你的思維從生活中尋覓數學的意義，主要有以下幾個原因：

1. 主觀體驗：數學的意義對每個人來說可能是不同的，因為它與個人的經歷、價值觀和興趣相關。這種主觀體驗是獨特的，AI 無法完全理解和共享。你的思維是基於你自己的觀點、感受和經驗，這使你能夠在生活中尋覓數學的意義。
2. 創造力和直覺：數學不僅僅是一個機械的計算過程，它需要創造性的思考和直覺的洞察力。這些能力是人類思維的獨特特徵，AI 無法像人類一樣產生創新的數學理論、發現新的模式或建立新的連結。
3. 上下文理解：數學的意義與現實生活緊密相連，並需要將數學概念應用於特定的情境中。你的思維能夠理解和應用上下文信息來解決問題，並將數學與其他領域相結合，從而更好地理解其意義。AI 在這方面的能力仍然有限。
4. 情感和人際交互：數學教育往往涉及到與他人的互動和討論，以及與他人分享和交流數學的意義。這種情感和人際交互對於深入理解數學概念和從不同的觀點來看待數學意義非常重要。AI 無法提供與他人的情感互動和交流。

總之，AI 無法代替你的思維從生活中尋覓數學的意義，因為它無法理解你的主觀體驗、缺乏創造力和直覺、難以理解上下文和情感交互。然而，AI 可以作為一個有用的工具，提供數學資源和問題解決方法，以幫助你在尋覓數學的意義時提供支持 and 啟發。你的思維和人類的特質使得你能夠從生活中獨特的角度來理解和應用數學。



拾遺的啟示

在日常生活中，你可曾體驗過小甘類似的經歷。

正在某中學讀中三的小甘，某天在放學回家途中，赫然發現一張一百元的鈔票被遺下於路旁。小甘遂順手拾起，並放入右邊的褲袋。邊行邊想，小甘自言自語地說：「我書包內原已有一百元紙幣，現在無緣無故多了一百元進帳，我身上的財富豈不是**增加了 100%**！」

返抵家中，當小甘的手往右邊褲袋一探時，頓感茫然。原來褲袋穿了個洞，而拾遺得來的百元鈔票亦不知所終。但小甘似乎很快找到了一點安慰：「拾遺得來的 \$100，使我身上的財富達到 \$200；現在掉去 \$100，即**減少了 50%**。嘻，嘻，那麼我還賺了 **50%** 呢！」



想一想

- 拾回來的錢雖然得而復失，為何小甘還認為自己賺了 50%？

現在，讓我們仔細地看看小甘的想法吧！

小甘的「邏輯」：

拾取 \$100

原有 \$100 \longrightarrow 擁有 \$200

$$\text{增加百分比} = \frac{\$200 - \$100}{\$100} \times 100\% = 100\%$$

遺失 \$100

身上擁有 \$200 \longrightarrow 仍擁有 \$100

$$\text{減少百分比} = \frac{\$200 - \$100}{\$200} \times 100\% = 50\%$$

結論：賺了 50% (100% - 50%)

想一想

→ 小甘的想法錯在哪裏？

表面上小甘並沒有將數學老師所教的公式運算錯誤。但在沒有考慮以不同的原本數量作百分率比較的情況下，小甘難免顧此失彼，以致得出一個毫無意義的結論。

小甘的故事帶給我們一個重要的啟示：**拾遺當然不對，盲目套用數學公式亦是一個不智的做法！**

相關數學概念

若 A 值增加了 $x\%$ 變為 B 值，而 B 值減少了 $y\%$ 成為 C 值，那麼 $C = (1 + x\%)(1 - y\%)A$ 。

因此， C 和 A 作比較時的變化百分比應為 $\left(x - y - \frac{xy}{100}\right)\%$ 。以小甘的例子， $x = 100$ ， $y = 50$ ，很明顯一得一失的結果是 0% 。



訂購 pizza 的選擇

這一天，天氣不似預期，外面下着傾盆大雨。小思居住的地區的雨量也特別多，外面街道的水浸情況也特別嚴重。小思的爸爸慨嘆，全球氣候變化，令暴雨出現的可能性，由「500年一遇」的不尋常，變成要有心理準備的日常。打消了外出午飯的念頭，小思提議網上外賣 pizza 作為午餐。考慮訂購兩個 pizza 可享優惠後，小思建議訂購兩個分別為 9 吋和 10 吋的 pizza。爸爸好奇地問：「為何不訂購一個 12 吋的大 pizza 呢？」。小思指出經優惠後，兩個 9 吋和 10 吋 pizza 的總價錢和一個 12 吋 pizza 的價錢相若，並隨即拿起紙和筆來計算相關 pizza 的大小。

Pizza 尺寸



6吋

9吋

10吋

12吋

訂購兩個或以上可獲75折優惠

想一想

- 「9 吋和 10 吋 pizza 的整體分量 > 12 吋 pizza 的分量」代表三個 pizza 的直徑之間有何關係？以該三條直徑組成的三角形，其最大內角是銳角、直角還是鈍角？

$$\text{大 pizza (12 吋) 的體積} = \pi \times \left(\frac{12}{2}\right)^2 \times t,$$

$$9 \text{ 吋和 } 10 \text{ 吋 pizza 的總體積} = \pi \times \left(\frac{9}{2}\right)^2 \times t + \pi \times \left(\frac{10}{2}\right)^2 \times t,$$

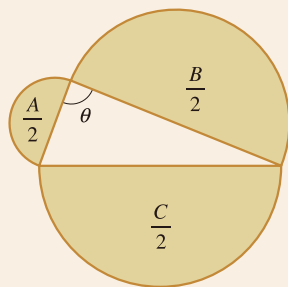
其中 t 為 pizza 的厚度

完成計算後，小思更肯定地說：「既然價錢相若，而大 pizza 的體積較 9 吋和 10 吋 pizza 的總體積為小，加上可以品嚐多一種口味，所以訂購兩個分別為 9 吋和 10 吋的 pizza 是較佳的選擇。」

完成網上訂購後，等候良久，期待的 pizza 還未送到。正在擔心外賣運送受天雨阻滯的一刻，門鈴聲響起，小思終於收到她訂購的外賣。小思把所訂購的兩個 pizza 分別切開兩半，準備與爸爸分享，而爸爸卻拿出了他預先剪裁出來以 9 吋、10 吋及 12 吋為直徑的半圓紙板，讓小思以「目測」的方法，檢視她較早之前通過計算所得的結論，即訂購兩個 pizza (9 吋和 10 吋) 較訂購一個 12 吋的 pizza 的分量為多。小思對這個「目測」方法感到很有趣，並把分析的結果，記錄在她的數學日誌上。

小思的數學日誌的記錄：

假設大 pizza 的面積為 C ，而另外兩個較小的面積分別為 A 和 B 。
若 $A + B = C$ ，則 $\theta = 90^\circ$ (畢氏定理的逆定理)





從數學中可以找到公平？

與小甘一起在學校寄宿已有三年的小強，即將隨父母移居海外。他們正為着如何分配共同擁有的「財產」而煩惱，其中包括一部字典機、一部迷你鐳射唱機和一套武俠小說。在路上剛巧遇見小思，於是三人便一起商討如何找出個公平的分配方法。

首先小思問他們：「在你們心目中，何謂公平？」小甘答：「在分配物件上，彼此所得到的，必須是互相皆認同的對等價值。」

小強點頭稱是，小思以半帶笑的口吻，建議他們以低價將物件轉讓給她，然後均分所得的金錢便成。小甘即認真地回應說：「這樣的安排，對小強和我都不甚公平。何況這些物件是有紀念價值的呢！」

在繼續的討論中，小思突然想起了最近在網上曾閱讀到有關「公平方程式」的專題報導。雖然報導中並沒有列出分配物件的數學方程，但以「根據各自的價值偏好分配手上積分點」作調配的原理，卻留給小思頗深刻的印象。最後，小思為他們作了以下的分配安排。

兩人須首先各自定出他們共同擁有的物件在心中的估計的價值。



想一想

→ 你相信數學方法可以解決有關「公平」的問題嗎？

在表 D15.1 中，「均分值」是根據兩人各自估價的總值平均而來，每項物件則歸在估價較高者的名下；換言之，字典機和鐳射唱機會屬於小強，而武俠小說歸小甘擁有。然後，將「均分值」與各自擁有物件的估價總數相減，便可計得差額。

物件	小甘	小強
字典機	\$ 500	\$ 700
迷你鐳射唱機	300	550
武俠小說(一套)	350	200
總值	1150	1450
均分值	575	725
估價	350	1250
差額	225	-525

表 D15.1 在物件分配上的估價

根據差額，小強須將 \$525 交給擔任公正的小思，而小甘則可從小思手中取回 \$225。但這兩個金額相差達 $(\$525 - \$225) = \$300$ 。因此，當公正的小思最後須將這剩餘的 \$300 攤分給回二人。總結之下，小甘會得到他心愛的武俠小說及獲得 $(\$225 + \$150) = \$375$ 的現金；而小強則會擁有字典機和迷你鐳射唱機，但須付出 $(\$525 - \$150) = \$375$ 給小甘。



漢英數學詞匯索引



AM-GM 不等式	AM-GM inequality 【代數】	A2
一畫		
一一對應	one-to-one correspondence 【代數】	A5
一元二次方程式	quadratic equation in one variable 【代數】	A8, C26
二畫		
二項式	binomial 【代數】	A7
二次函數	quadratic function 【代數】	C26
二次公式	quadratic formula 【代數】	C26
二次方程	quadratic equation 【代數】	D7
四畫		
反變	inverse variation 【代數】	A14, A15
公比	common ratio 【代數】	A23
不等式	inequality 【代數】	A26
五邊形	pentagon 【算術】	B6
六邊形	hexagon 【算術】	B6
比	ratio 【算術】	B6
公共邊	common side 【算術】	B6
切點	point of tangency 【幾何】	C11
切線	tangent 【幾何】	C14
公差	common difference 【幾何】	C22
中位數	median 【統計】	D13
方差	variance 【統計】	D20
五畫		
正比	direct proportion 【代數】	A11
正多邊形	regular polygon 【算術】	B6
正六邊形	regular hexagon 【幾何】	C4
外心	circumcentre 【幾何】	C6
正弦曲線	sine curve 【三角】	C11, C27
可變點	variable point 【幾何】	C15
正弦函數	sine function 【三角】	C27
正弦定律	Sine Law 【三角】	C30
加權平均	weighted mean 【統計】	D2, D16, D22
平均數	mean 【統計】	D12, D20
平均數	average 【統計】	D13
加權平均數	weighted mean 【統計】	D17



A

AM-GM inequality	AM-GM 不等式【代數】	A2
amplitude	幅角【幾何】	C27
angle of depression	俯角【幾何】	C8
angle subtended at centre	圓心角【幾何】	C11
angles at a point	同頂角【幾何】	C10
arc	弧【幾何】	C11
arc length	弧長【幾何】	C20, C22, C23
arithmetic mean	算術平均【統計】	D13, D18
	算術平均數【統計】	A2, D17
arithmetic progression	等差級數【代數】	B11
arithmetic sequence	等差數列【代數】	A21, A22, B9, C22
average	平均數【統計】	D13

B

bar chart	棒形圖【統計】	D11
bijection	雙射【代數】	A5
binomial	二項式【代數】	A7

C

circumcentre	外心【幾何】	C6
combination	組合【概率】	D6
common difference	公差【幾何】	C22
common ratio	公比【代數】	A23
common side	公共邊【算術】	B6
concentric circles	同心圓【幾何】	C11
concylic	共圓【幾何】	C13
constant	常數【代數】	A15
constant function	常數函數【代數】	A6
constraint	約束條件【代數】	A26
coordinate axes	坐標軸【幾何】	C19
Cosine Law/Cosine Rule	餘弦定律【三角】	C1, C28, C29, C30
cycloid	旋轉線【幾何】	C15

D

dependent variable	應變量【代數】	A5
direct proportion	正比【代數】	A11
dispersion	離散度【統計】	D21